



QR-kod
maqolaning DOI
sahifasini
ochadi

Allanazarova Tazagul Jumaniyazovna.
Parabolaliq tiptegi ten'lemeler ushin
lokalliq emes mas'elelerdi sheshiw //
«O'zbekiston olimi ayollarining
mamlakat taraqqiyotiga qo'shayotgan
hissasi» mavzusidagi xalqaro ilmiy-
amaliy konferensiya materiallari
(Nukus, 2026-yil 9–10-oktyabr). –
Nukus, 2026. – B. 304–309. – DOI:
[https://doi.org/10.66073/ReFocus-
Conf/0910057](https://doi.org/10.66073/ReFocus-Conf/0910057)



«O'zbekiston olimi ayollarining
mamlakat taraqqiyotiga
qo'shayotgan hissasi»

XALQARO ILMIY-AMALIY
KONFERENSIYA
NUKUS, 9–10-OKTYABR 2026

PARABOLALIQ TIPTEGI TEN'LEMELER USHIN LOKALLIQ EMES MAS'ELELERDI SHESHIW

Allanazarova Tazagul Jumaniyazovna

PhD, úlken oqıtıwshı

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti

e-mail: j.tazagul86@mail.ru

Annotaciya: Matematikalıq fizika ten'lemeleri tábiyattaǵı kópshilik processlerdi (jıllılıqtıń tarqalıwı, diffuziya, tolqın háreketi, elektromagnitlik maydanlar) modellestiriwde ayırıqsha orın iyeleydi. Bunday ten'lemelerdi sheshiwde baslanǵısh hám shegaralıq shártler ayırıqsha áhmiyetke iye. Zamanagóy ilim hám texnikada “lokallıq emes shegaralıq shártler” áhmiyetli orın iyeleydi. Olar arasında

$$u(0,t) \pm u(l,t) = 0, \quad u_x(0,t) \pm u_x(l,t) = 0,$$

sıyaqlı shártler keń tarqalǵan. Bul jumısta bunday lokallıq emes shegaralıq shártli parabolikalıq mas'eleniń matematikalıq talqılawı hám ámeliy tárepleri sáwlelendiriledi.

Gilt sózler: lokallıq emes shegaralıq shártler, parabolikalıq tiptegi ten'leme, Fure usılı, Dirixle hám Neyman mas'eleleri, Shturm-Liuvill mas'eleleri, menshikli mánis, menshikli sheshim.

Lokallıq emes shegaralıq mas'eleler zamanagóy ámeliy matematikanıń áhmiyetli baǵdarlarınan biri bolıp esaplanadı. Klassikalıq shegaralıq mas'elelerde shegaradaǵı shártler tek shegaranıń ózindegı mánislerdi baylanıstırsa, al lokallıq emes shegaralıq shártlerde shegaradaǵı jaǵday shegaranıń hár qıylı noqatlarındaǵı yamasa hátte oblast ishindegi integral mánisler menen baylanısqan boladı. Bunday mas'elelerdiń payda bolıwı fizikalıq, biologiyalıq hám injenerlik processlerdi izertlewdegi ámeliy mıtájlikler menen baylanıslı [1]–[3].

Parabola tipindegi ten'lemeler, atap aytqanda jıllılıq ótkizgishlik ten'lemesi $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ – waqıt boyınsha evolyuciyalanıwshı processlerdi – zattuń tarqalıwı, jıllılıqtıń ótiwi, ximiyalıq reaktorlardaǵı koncentraciyanıń ózgeriwın súwretleydi. Bul klassikalıq Dirixle, Neyman hám aralas shegaralıq shártlerde jaqsı úyrenilgen, biraq zamanagóy ilim hám texnikada “lokallıq emes shegaralıq shártler” áhmiyetli orın iyeleydi. Eger bir waqıttıń ózinde hám Dirixle hám Neyman mas'elelerin baylanıstırsa, onda ol lokallıq emes shegaralıq shárt boladı. Olar arasında

$$u(0,t) \pm u(l,t) = 0, \quad u_x(0,t) \pm u_x(l,t) = 0,$$

sıyaqlı shártler keń tarqalǵan [4], [5]. Bul jumısta tiykarınan parabolalıq tiptegi ten'lemenıń lokal emes shegaralıq shárt penen berilgen shegaralıq mas'elelerin Fure usılı arqalı sheshiwdi qarastıramız.

Parabolalıq tiptegi ten'lemeler ushın lokallıq emes shegaralıq shártler periodlı hám antiperiodlı lokallıq emes shegaralıq shártlerge

ajratiladi. Periodli lokalliq emes shegaraliq shartlar $u(0,t) - u(l,t) = 0, -u_x(0,t) - u_x(l,t) = 0$ sheksiz uzun yamasa kolco tarizli sterjendegi jillilqtn tarqaliwn modellestiredi. Misali, juqa kolco boyinsha hareket bolistiriwi periodli boladi. Bunday shartlar tiykarinan simmetriyalı sistemalarda ushirasadi. Antiperiodli lokalliq emes shegaraliq shartlar $u(0,t) + u(l,t) = 0, -u_x(0,t) + u_x(l,t) = 0$ kvant mexanikada fermionlar (elektron) ushin tolqin funkciyasinin qasiyetlerinen kelip shigadi. Jillilqtn tarqaliwnida shegaralardn bir-birine qarata kerı fazada reaksiya beriwn anlatadi [6].

Meyli uzunligi^l ge ten bolgan, qaptal betinen izolyatsiyalangan jinshke sterjennin ushlarındağı temperatura nolge, al daslepki temperaturasi bolsa $\varphi(x)$ qa ten bolgan maseleni qarastirayiq, yagniy

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0 \quad (1)$$

jillilq otkazgishlik tenlemesi ushin

$$u(0,t) \pm u(l,t) = 0, \quad u_x(0,t) \pm u_x(l,t) = 0 \quad (2)$$

lokalliq emes shegaraliq shart ham

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (3)$$

baslangish shartlerin qanaatlandiratuĝın sheshimin tabiw maselesin qarastirayiq [7].

Qarastirilip atirgan (1)-(3) masale lokalliq emes shegaraliq shartleri menen berilgen shegaraliq masale bolip esaplanadi.

Aniqlama 1: Ushlarinan qatti bekitilgen (1)-tenleme birtekli materialdın tegis qatlamındağı temperaturanı

$$u(0,t) - u(l,t) = 0, \quad u_x(0,t) - u_x(l,t) = 0 \quad (2')$$

lokalliq emes shegaraliq shartti ham (3)-baslangish shartlerin qanaatlandiratuĝın sheshimin tabiw maselasi periodli lokalliq emes shegaraliq shartleri menen berilgen shegaraliq masale delinedi.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) - u(l,t) = 0, \\ u_x(0,t) - u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (4)$$

Aniqlama 2: Ushlarinan qatti bekitilgen (1)-tenleme birtekli materialdın tegis qatlamındağı temperaturanı

$$u(0,t) + u(l,t) = 0, \quad u_x(0,t) + u_x(l,t) = 0 \quad (2'')$$

lokalliq emes shegaraliq shartti ham (3)-baslang'ish shartlerin qanaatlandiratuvin sheshimin tabiw maseleni antiperiodli lokalliq emes shegaraliq shartleri menen berilgen shegaraliq masale delinedi.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) + u(l, t) = 0, \\ u_x(0, t) + u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (5)$$

Endi (4)-parabolaliq tiptegi periodli lokalliq emes shegaraliq shartleri menen berilgen shegaraliq maseleni qanaatlandiratuvin nollik emes sheshimin ozgeriwshilerdi ajratiw usuli menen sheshemiz, yagniy sheshimni

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (6)$$

kobeymesi turinde izleyviz. Natijjede,

$$T''(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x)$$

yamasa $u(x, t) \neq 0$ bolganliqtan, bunnan

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2 = \text{const.}$$

boladi. Bunnan

$$T''(t) + a^2 \mu^2 T(t) = 0, \quad (7)$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \quad (8)$$

turindeki adettegi differentsialliq tenlemelerge iye bolamiz.

Daslep (8)-tenlemege muvapiq Shturm-Liuvill maselesine iye bolamiz:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) \\ X'(0) = X'(l). \end{cases} \quad (9)$$

(9)-Shturm-Liuvill maseleni sheshimi ushin eki sızıqlı erkli menshikli funkciyalar kelip shıgadı:

$$X_k^1(x) = \cos \frac{2k\pi}{l} x, \quad X_k^2(x) = \sin \frac{2k\pi}{l} x, \quad \mu = \frac{2k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Endi $\mu = \mu_k$ nın bul manislerine $T'(t) + a^2 \mu^2 T(t) = 0$ tenlemesiniń tómendegi sheshimleri tuwra keledi:

$$k = 0, \mu = 0 \Rightarrow T_0'(t) + a^2 \cdot 0 \cdot T_0(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = \text{const} \Rightarrow T_0(t) = \frac{1}{2},$$

$$k \geq 1, \mu > 0 \Rightarrow \mu = \frac{2\pi k}{l} \Rightarrow T_k'(t) + \left(\frac{2\pi ka}{l}\right)^2 T_k(t) = 0,$$

$$T_k(t) = e^{-\left(\frac{2\pi ka}{l}\right)^2 t}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Demek,

$$u_0(x, t) = T_0(t)X_0(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_0 \cos \frac{2\pi \cdot 0}{l} x + B_k \sin \frac{2\pi \cdot 0}{l} x \right] e^{-\left(\frac{2\pi \cdot 0 a}{l}\right)^2 t} = \frac{A_0}{2},$$

$$u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{2\pi k}{l} x + B_k \sin \frac{2\pi k}{l} x \right] e^{-\left(\frac{2\pi ka}{l}\right)^2 t} \quad (10)$$

Endi A_k hám B_k koefitsientlerdi anıqlaw ushın, (10) - funktsiya (3)-shártlerdi qanaatlantırıwın tekseremiz.

$$u_k(x, 0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{2\pi k}{l} x + B_k \sin \frac{2\pi k}{l} x \right] = \varphi(x)$$

bolıp, bunnan

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{2\pi k}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx \Rightarrow A_0 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) dx$$

boladı. Bul mánislerdi (10) dağı ornına qoysaq, berilgen (4) aralas mäseleniń sheshimine iye bolamız.

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{2\pi k}{l} x + B_k \sin \frac{2\pi k}{l} x \right] e^{-\left(\frac{2\pi ka}{l}\right)^2 t},$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{2\pi k}{l} x dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Endi (5)-antiperiodlı lokallıq emes shegaralıq shártleri menen berilgen shegaralıq mäseleni qarastıramız. Bul shegaralıq mäslege sáykes keliwshi Shturm-Liuvill mäsesei

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \\ X(0) = -X(l) \\ X'(0) = -X'(l). \end{cases} \quad (11)$$

kórinisinde boladı. Bul mäseleniń menshikli mánisleri

$$\mu l = (2k+1)\pi \Rightarrow \mu = \frac{(2k+1)\pi}{l} \Rightarrow \mu = \left(\frac{(2k+1)\pi}{l} \right)^2, \quad k \geq 0$$

(11)-Shturm-Liuuill máselesi sheshimi ushın eki sıızıqlı erkli menshikli funkciyalar kelip shıǵadı:

$$X_k^1(x) = \cos \frac{(2k+1)\pi}{l} x, \quad X_k^2(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x$$

Endi $\mu = \mu_k$ nıń bul mánislerine $T'(t) + a^2 \mu^2 T(t) = 0$ teńlemesiniń tómendegi sheshimleri tuwra keledi:

$$T_k(t) = e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l} \right)^2 t}, \quad k \geq 0$$

Demek,

$$u_k(x, t) = T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{(2k+1)\pi}{l} x + B_k \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x \right] e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l} \right)^2 t}$$

Endi A_k hám B_k koeffitsientlerdi anıqlaw ushın, (10)-funktsiya (3)-shártlerdi qanaatlantırıwın tekseremiz.

$$u_k(x, 0) = \varphi(x)$$

bolıp, bunnan

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2k+1)\pi}{l} x dx, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

boladı. Bul mánislerdi (10)-daǵı ornına qoysaq, berilgen (4)-aralas máseleńiń sheshimine iye bolamız.

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{(2k+1)\pi}{l} x + B_k \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x \right] e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l} \right)^2 t}, \quad (12)$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2k+1)\pi}{l} x dx, \quad k \geq 0$$

Demek, qarastırıp atırǵan parabolalıq tiptegi teńlemenıń lokallıq emes shegaralıq shárt penen berilgen shegaralıq máselelerin Fure usılı arqalı sheshiw nátiyjesine, periodlı lokallıq emes shegaralıq shártler $u(0, t) - u(l, t) = 0$, $u_x(0, t) - u_x(l, t) = 0$ menen berilgen shegaralıq máseleńiń hám antiperiodlı lokallıq emes shegaralıq shártler $u(0, t) + u(l, t) = 0$, $u_x(0, t) + u_x(l, t) = 0$ menen berilgen shegaralıq máselelerdiń hár bir shegaralıq másele ushın menshikli mánis hám menshikli funkciya anıqlanıp, sheshimler menshikli funkciyalar arqalı qatar kórinisinde jazıladı eken.

Paydalanilgan ádebiyatlar

1. Ионкин Н.И. Решение одной граничной задачи теории теплопроводности с нетрадиционным граничным условием. — *Дифференциальные уравнения*, 1977, Т. 13, №2, С. 294–304.
2. Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с нетрадиционным граничным условием. — *Сибирский матем. журнал*, 1964, Т. 43, №3, С. 543–556.5. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. — М.: Nauka, 1977. — 736 s.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 736 с.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
5. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Двухточечные граничные условия для задачи Штурма-Лиувилля. — *Дифференциальные уравнения*, 1987, Т. 23, №8, С. 1422–1431.
6. Юрчук Н.И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений. — *Дифференциальные уравнения*, 1986, Т. 22, №12, С. 2117–2126.
7. Omarov A, Qurbanbaev Ó, Qilishbaeva G. “Matematikaliq fizika teńlemeleri boyınsha mısallar hám máseleler” Nókis, “Bilim” 2019.