RESEARCH FOCUS
xalqaro ilmiy jurnali
hamkorligida

DOI
10.66073/ReFocus-Conf/0910080

QR-kod maqolaning DOI sahifasini ochadi

SAHIFALAR 430–433
TIL O‘zbek

IQTIBOS UCHUN
Barliqbaeva Gulayim Baxadir qizi. Yuqumli kasalliklar rivojlanish dinamikasini matematik modellashtirish // «O‘zbekiston olima ayollarining mamlakat taraqqiyotiga qo‘shayotgan hissasi» mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya materiallari (Nukus, 2026-yil 9–10-oktyabr). – Nukus, 2026. – B. 430–433. – DOI: https://doi.org/10.66073/ReFocus-Conf/0910080

YUQUMLI KASALLIKLAR RIVOJLANISH DINAMIKASINI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

Barliqbaeva Gulayim Baxadir qizi
Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universiteti, Tabiiy va aniq fanlar kafedrasi
e-mail: gulibakhadirovna0509@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada yuqumli kasalliklarning populyatsiyada tarqalish dinamikasini ifodalovchi bo‘linmali (kompartmentli) SEIR modeli tahlil qilingan. Modelning oddiy differensial tenglamalar tizimi shaklidagi bayoni, bazaviy reproduktiv son R_0 ning chegaraviy ahamiyati, kasallik bo‘lmagan muvozanatning turg‘unligi va epidemiyaning yakuniy hajmini aniqlovchi tenglama keltirilgan. Aholi soni 100 000 bo‘lgan shartli populyatsiya uchun sonli tajriba o‘tkazilib, R_0 qiymati 1,4 dan 4,9 gacha ortganda epidemiya cho‘qqisi 247-kundan 51-kunga siljishi, yakuniy kasallanish ulushi esa 51,1% dan 99,2% gacha o‘sishi aniqlandi. R_0 = 3,5 holatida aholining 75 foizi dastlabki immunitetga ega bo‘lganda epidemiya yuz bermasligi ko‘rsatildi.

Kalit so‘zlar: matematik modellashtirish, yuqumli kasalliklar, SEIR modeli, bazaviy reproduktiv son, kollektiv immunitet, oddiy differensial tenglamalar, epidemiya cho‘qqisi.

Kirish

Yuqumli kasalliklar bugungi kunda ham aholi salomatligiga va iqtisodiyotga jiddiy ta’sir ko‘rsatuvchi global xavflardan biri bo‘lib qolmoqda. COVID-19 pandemiyasi epidemiyaning kelgusi borishini oldindan baholash, karantin va emlash kabi choralarning samarasini miqdoriy taqqoslash zarurligini yaqqol ko‘rsatdi. Bunday masalalarni hal etishda matematik modellashtirish asosiy vositalardan biri hisoblanadi, chunki real populyatsiyada tajriba o‘tkazish axloqiy va amaliy jihatdan mumkin emas.

Epidemiyalarni matematik usullar bilan o‘rganish tarixi XVIII asrga borib taqaladi: D. Bernulli chechakka qarshi inokulyatsiyaning umr davomiyligiga ta’sirini miqdoriy baholagan. Zamonaviy nazariyaning poydevori esa Kermak va Makkendrik tomonidan 1927-yilda yaratilgan bo‘linmali model bilan qo‘yildi [1]. Unda populyatsiya kasallikka moyil, kasallangan va tuzalgan guruhlarga ajratilib, guruhlar orasidagi o‘tishlar differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Keyinchalik Anderson va Mey [2] hamda Xetkot [3] modelni yashirin davr, demografik jarayonlar va emlashni hisobga oladigan ko‘rinishlarga kengaytirdi.

Bazaviy reproduktiv son R_0 nazariyaning markaziy tushunchasi hisoblanadi. Uni keyingi avlod matritsasi orqali hisoblash usuli Dikmann va hammualliflar [4] hamda van den Drishe va Votmaf [5] ishlarida asoslab berilgan. Epidemik modellarning amaliy qo‘llanilishi Kiling va Rohani [6], shuningdek Brauer va Kastilo-Chaves [7] monografiyalarida keng yoritilgan. Shunga qaramay, modelning har bir parametri natijaga qanday ta’sir

qilishini sonli tajriba orqali ko‘rsatish o‘quv va amaliy maqsadlarda dolzarbligicha qolmoqda.

Tadqiqotning maqsadi — SEIR modeli asosida yuqumli kasallik dinamikasining asosiy ko‘rsatkichlari (epidemiya cho‘qqisi, yakuniy hajm, emlash chegarasi) R_0 ga qanday bog‘liqligini nazariy va sonli usullar bilan aniqlashdan iborat.

Tadqiqot ob’ekti sifatida yopiq, bir jinsli aralashadigan populyatsiya olindi. U to‘rt guruhga bo‘lindi: $S(t)$ — kasallikka moyil, $E(t)$ — yashirin davrdagi, $I(t)$ — yuqtiruvchi va $R(t)$ — tuzalgan yoki immunitetga ega shaxslar. Umumiy son $N = S + E + I + R$ o‘zgarmas deb faraz qilinadi (tug‘ilish va o‘lim hisobga olinmaydi). Ommaviy ta’sir qonuniga ko‘ra model quyidagi tenglamalar tizimi bilan ifodalanadi [8]:

$$dS/dt = -\beta SI/N \quad (1)$$

$$dE/dt = \beta SI/N - \sigma E \quad (2)$$

$$dI/dt = \sigma E - \gamma I \quad (3)$$

$$dR/dt = \gamma I \quad (4)$$

bu yerda β — yuqtirish tezligi koeffitsiyenti, $1/\sigma$ — o‘rtacha yashirin davr, $1/\gamma$ — o‘rtacha yuqtiruvchanlik davri. Boshlang‘ich shartlar: $S(0) = N - I(0)$, $E(0) = R(0) = 0$. SIR modeli (1)–(4) tizimdan E guruhini chiqarib tashlash bilan hosil bo‘ladi.

Nazariy tahlilda tizim kasallik bo‘lmagan muvozanat nuqtasi ($S = N$, $E = I = 0$) atrofida chiziqlantirildi. Yuqtiruvchi guruhlar (E, I) uchun keyingi avlod matritsasi usuli [5] bo‘yicha bazaviy reproduktiv son quyidagicha aniqlanadi:

$$R_0 = \beta/\gamma \quad (5)$$

Bu yerda FV^{-1} matritsaning spektral radiusi β/γ ga teng: u bitta yuqtiruvchi shaxs butunlay moyil populyatsiyada o‘z kasallik davrida o‘rtacha nechta yangi shaxsni yuqtirishini bildiradi. Yashirin davr $1/\sigma$ bu qiymatga ta’sir qilmaydi.

Sonli tajribada tizim Dormand–Prins (4(5)-tartibli Runge–Kutta) usuli bilan, nisbiy xatolik 10^{-10} aniqligida yechildi. Parametrlar: $N = 100\,000$, $1/\sigma = 5$ kun, $1/\gamma = 7$ kun, $I(0) = 10$. Yuqtirish koeffitsiyenti β ning 0,2; 0,3; 0,5 va 0,7 kun^{-1} qiymatlarida R_0 mos ravishda 1,4; 2,1; 3,5 va 4,9 ga teng bo‘ladi. Emlash ta’siri boshlang‘ich immun ulush p ni 0; 0,3; 0,5 va 0,75 deb olish orqali baholandi. Hisob-kitoblar Python (SciPy) muhitida bajarildi.

Chiziqlantirilgan tizim $R_0 < 1$ bo‘lganda kasallik bo‘lmagan muvozanat lokal asimptotik turg‘un, $R_0 > 1$ bo‘lganda esa noturg‘un ekanini ko‘rsatadi [5]. Demak, $R_0 = 1$ epidemiya paydo bo‘lishining chegaraviy qiymatidir. Agar populyatsiyaning p ulushi dastlab immunitetga ega bo‘lsa, samarali reproduktiv son $R_0(1 - p)$ ga teng bo‘ladi va epidemiyaning oldini olish sharti quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$p_c = 1 - 1/R_0 \quad (6)$$

$R_0 = 3{,}5$ uchun $p_c \approx 0{,}714$. Epidemiya tugagach kasallanganlar ulushi z ni topish uchun (1)–(4) tizimda S ning R bo‘yicha hosilasi $S(0) \approx N$, $R(0) = 0$ da integrallanadi va

$$z = 1 - \exp(-R_0 z) \quad (7)$$

transsendent tenglamasi hosil bo‘ladi; u noldan farqli ildizga faqat $R_0 > 1$ bo‘lganda ega. Oddiy SIR modelida cho‘qqi vaqtidagi kasallanganlar ulushi esa [3]

$$I_{max}/N = 1 - (1 + \ln R_0)/R_0 \quad (8)$$

DOI 10.66073/ReFocus-Conf/0910080

formulasi bilan beriladi. Sonli tajriba natijalari 1-jadvalda va 1-rasmda keltirilgan. (7) tenglama ildizlari bilan taqqoslash hisob to‘g‘riligini tasdiqladi: masalan, $R_0 = 1{,}4$ da (7) dan $z \approx 0{,}5110$, sonli yechimdan 0,5112 olindi.

Epidemiyaning boshlang‘ich bosqichida ($S \approx N$) chiziqlantirilgan (2)–(3) tizim eksponensial o‘sishni beradi: $I(t) \propto e^{rt}$. O‘sish tezligi r xarakteristik tenglama $(r + \sigma)(r + \gamma) = \sigma\gamma R_0$ ning musbat ildizi sifatida topiladi:

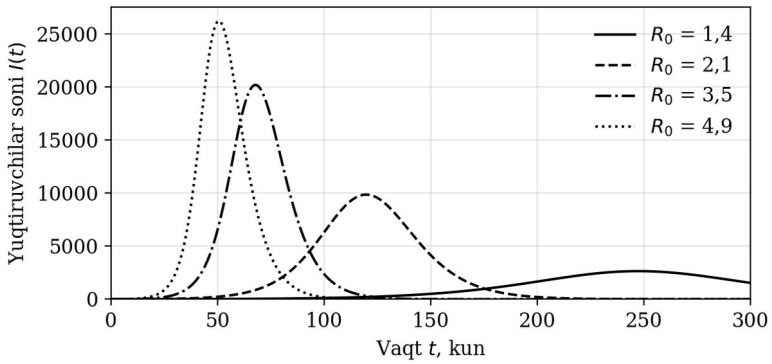
$$r = [-(\sigma + \gamma) + \sqrt{((\sigma - \gamma)^2 + 4\sigma\gamma R_0)}]/2 \qquad (9)$$

Ikki barobar ortish vaqti $T_d = \ln 2/r$ bo‘lib, $R_0 = 1{,}4$; 2,1; 3,5 va 4,9 uchun mos ravishda 22,7; 9,2; 4,7 va 3,4 kunga teng. Demak, R_0 ortishi bilan aralashuv choralariga ajratilgan vaqt keskin qisqaradi.

1-jadval. R_0 ning epidemiya ko‘rsatkichlariga ta’siri (SEIR, $N = 100\,000$)

β, kun^{-1}	R_0	Cho‘qqi kuni	Cho‘qqidagi I, kishi	I_{max}/N, %	Yakuniy z
0,2	1,4	247	2 646	2,65	0,511
0,3	2,1	120	9 851	9,85	0,822
0,5	3,5	68	20 177	20,18	0,966
0,7	4,9	51	26 183	26,18	0,992

Jadvaldan ko‘rinadiki, R_0 ning 1,4 dan 4,9 gacha ortishi epidemiya cho‘qqisini 247-kundan 51-kunga yaqinlashtiradi, cho‘qqidagi kasallar sonini esa qariyb 10 baravar oshiradi (2 646 dan 26 183 gacha). Shuningdek, SIR modelida $R_0 = 3{,}5$ da (8) bo‘yicha $I_{max}/N \approx 35{,}6\%$ bo‘lsa, SEIR modelida bu ko‘rsatkich 20,2% ni tashkil etadi: yashirin davr kasallangan guruhdagi cho‘qqini pasaytiradi va kechiktiradi, ammo yakuniy hajmga ta’sir qilmaydi.



1-rasm. Turli R_0 qiymatlarida yuqtiruvchilar soni $I(t)$ ning o‘zgarishi

1-rasmdan ko‘rinadiki, $R_0 = 1{,}4$ da epidemiya sekin rivojlanadi, $R_0 = 4{,}9$ da esa yuqtiruvchilar soni qisqa muddatda keskin o‘sib, so‘ng tez kamayadi.

Yashirin davr ta’siri ham tekshirildi ($R_0 = 3{,}5$). $1/\sigma = 2$, 5 va 10 kun bo‘lganda cho‘qqi mos ravishda 48-, 68- va 94-kunda kuzatiladi, cho‘qqidagi yuqtiruvchilar soni 27 254, 20 177 va 14 240 kishini tashkil etadi, yakuniy kasallanish ulushi esa har uchala holatda 0,966 bo‘lib qoladi. Demak, yashirin davr jarayonni vaqt bo‘yicha cho‘zadi va cho‘qqini pasaytiradi, ammo (7) ga ko‘ra yakuniy hajmni o‘zgartirmaydi.

Emlashning ta’siri 2-jadvalda keltirilgan ($\beta = 0{,}5$ kun^{-1}, $R_0 = 3{,}5$). $p = 0{,}3$ da cho‘qqidagi kasallar soni 2,2 baravar kamayadi va cho‘qqi 27 kunga kechikadi; $p = 0{,}5$ da kamayish 6,4 baravarga yetadi. $p = 0{,}75 > p_c$ bo‘lganda esa samarali

DOI 10.66073/ReFocus-Conf/0910080

reproduktiv son 0,875 < 1 bo‘ladi, kasallar soni monoton kamayadi va epidemiya yuz bermaydi. Bu natija (6) formulasi bilan to‘liq mos keladi.

2-jadval. Dastlabki immun ulush p ning ta’siri (SEIR, $R_0 = 3{,}5$)

p	$R_0(1-p)$	Cho‘qqi kuni	Cho‘qqidagi I, kishi	Kasallanganlar ulushi
0	3,50	68	20 177	0,966
0,30	2,45	95	9 099	0,620
0,50	1,75	145	3 159	0,356
0,75	0,88	—	—	< 0,001

Xulosa

Tadqiqot natijalariga ko‘ra, SEIR modelida epidemiyaning barcha asosiy ko‘rsatkichlari bazaviy reproduktiv son R_0 orqali belgilanadi: $R_0 > 1$ bo‘lganda epidemiya rivojlanadi, uning o‘sishi bilan cho‘qqi tezlashadi va kasallanganlar ulushi 51,1% dan 99,2% gacha ortadi. Emlash yoki boshqa choralar orqali samarali reproduktiv sonni birdan pasaytirish epidemiyaning oldini oladi; $R_0 = 3{,}5$ bo‘lgan kasallik uchun zarur immun ulush kamida 71,4% ni tashkil etadi.

Amaliy qo‘llash uchun model parametrlarini (β, σ, γ) real epidemiologik ma’lumotlar asosida baholash, aholini yosh guruhlariga ajratish va stoxastik modellarni qo‘llash tavsiya etiladi. Bir jinsli aralashuv va o‘zgarmas aholi soniga asoslangan bu model sifat tahlili uchun xizmat qiladi, aniq prognoz uchun esa qo‘shimcha kalibrlash talab etiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Kermack W.O., McKendrick A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Society A. – 1927. – Vol. 115, No. 772. – P. 700–721.

2. Anderson R.M., May R.M. Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control. – Oxford: Oxford University Press, 1991.

3. Hethcote H.W. The mathematics of infectious diseases // SIAM Review. – 2000. – Vol. 42, No. 4. – P. 599–653.

4. Diekmann O., Heesterbeek J.A.P., Metz J.A.J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations // Journal of Mathematical Biology. – 1990. – Vol. 28, No. 4. – P. 365–382.

5. van den Driessche P., Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission // Mathematical Biosciences. – 2002. – Vol. 180. – P. 29–48.

6. Keeling M.J., Rohani P. Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals. – Princeton: Princeton University Press, 2008.

7. Xaydarov A.T., Barliqbaeva G.B., Yuqimli kasalliklar rivojlanish dinamikasini matematik modellashtirish, «Математическая физика и смежные вопросы современного анализа»: Тезисы докладов международной научной конференции посвященной 60-летию со дня рождения профессора Д.К. Дурдиева (10–11 октября 2025 года, Бухара, Узбекистан). – Бухара. Изд–во «Дурдона». 2025. 31-33.

8. Xaydarov A.T., Barliqbaeva G.B., Yuqimli kasalliklar rivojlanish dinamikasini matematik modellashtirish, NEW RENAISSANCE international scientific journal. ResearchBib IF – 11.01,ISSN:3030-3753, Volume 3 Issue 2. 2026. 171-174.

DOI 10.66073/ReFocus-Conf/0910080