



СВОЙСТВА МОРФИЗМОВ МЕЖДУ РЕШЕТКАМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТРИПОТЕНТОВ НА SFS- ПРОСТРАНСТВЕ

Gulmira Muratbaeva

gulmiramuratbaeva8@gmail.com

Каракалпакского государственного университета имени Бердаха

Аннотация: В данной работе исследуются морфизмы между решётками геометрических трипотентов в сопряжённых пространствах нейтральных SFS-пространств. Рассматриваются понятия частично упорядоченных множеств и ортомодулярных решёток. Изучаются отображения, сохраняющие порядок и ортогональность. Устанавливаются условия, при которых такие отображения являются порядковыми изоморфизмами и ортоизоморфизмами.

Ключевые слова: SFS-пространство, геометрический трипотент, решётка, морфизм, ортоизоморфизм, частично упорядоченное множество.

PROPERTIES OF MORPHISMS BETWEEN LATTICES OF GEOMETRIC TRIPOTENTS IN SFS-SPACES

Abstract: In this work, morphisms between lattices of geometric tripotents in the dual spaces of neutral SFS-spaces are investigated. The concepts of partially ordered sets and orthomodular lattices are considered. Mappings preserving order and orthogonality are studied. Conditions under which such mappings are order isomorphisms and orthoisomorphisms are established.

Keywords: SFS-space, geometric tripotent, lattice, morphism, orthoisomorphism, partially ordered set.

В теории гранево симметричных пространств существенную роль играет исследование геометрической структуры единичного шара и его сопряжённого пространства. Особый интерес представляет изучение решётки геометрических трипотентов и отображений между ними (подробно см. [1-6]).

Целью данной работы является исследование свойств морфизмов между решётками геометрических трипотентов в нейтральных SFS-пространствах, а также установление условий, при которых такие отображения являются квантово-логическими изоморфизмами.

Определение 1. Пусть $P = (P, \leq)$ частично упорядоченное множество с наименьшим элементом 0 . Ортогональным отношением, $\perp$, на P называется отношение, удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) $\perp$ является симметричным отношением;
- (ii) $0 \perp a$ для любых $a \in P$;
- (iii) из $a \perp a$ вытекает, что $a = 0$;



(iv) если $a \perp b$, тогда $c \perp b$ для всех $c \leq a$.

Определение 2. Пусть P частично упорядоченное множество с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом ω .

• P называется *частично упорядоченным множеством с ортодополнением*, если существует операция $a \rightarrow a^\perp$ на P , называемая *ортодополнением*, удовлетворяющая следующим условиям для любых $a, b \in P$:

$$(i) a \leq b \Rightarrow b^\perp \leq a^\perp;$$

$$(ii) a^{\perp\perp} = a;$$

$$(iii) a \wedge a^\perp = 0 \text{ и } a \vee a^\perp = \omega.$$

Мы скажем, что два элемента a, b частично упорядоченного множества являются *взаимно ортогональными* ($a \perp b$), если $a \leq b^\perp$.

• Частично упорядоченное множество с ортодополнением $(P, \leq, \perp)$ называется *ортотомодулярным частично упорядоченным множеством* или *квантовой логикой*, если

$a \vee b$ существует при $a \perp b$

и выполняется следующее *ортотомодулярное условие*:

$$b = a \vee (b \wedge a^\perp), \text{ при } a \leq b.$$

Ортотомодулярная решётка – это ортотомодулярное частично упорядоченное множество, являющееся решёткой.

Определение 3. Отображение $\varphi: P \rightarrow Q$, где P и Q частично упорядоченные множества, называется

• *порядковым морфизмом*, если из $a \leq b$ вытекает $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ для любых $a, b \in P$. Мы также скажем, что φ *сохраняет порядок в одну сторону*;

• *вложением частично упорядоченных множеств*, если $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $\varphi(a) \leq \varphi(b)$;

• *порядковым изоморфизмом*, если оно является сюръективным порядковым вложением.

Определение 4. Пусть P и Q частично упорядоченные множества, снабженные отношением ортогональности. Отображение $\varphi: P \rightarrow Q$ называется

• *ортотоморфизмом*, если оно сохраняет ортогональное отношение в одном направлении, т.е. если для всех $a, b \in P$ имеем

$$\varphi(a) \perp \varphi(b) \text{ при } a \perp b;$$

• *ортоизоморфизмом*, если оно биективно сохраняет ортогональное отношение в обоих направлениях, т.е. если

$$\varphi(a) \perp \varphi(b) \Leftrightarrow a \perp b.$$

Обобщенным ортотомодулярным частично упорядоченным множеством P (или обобщенной квантовой логикой) является частично упорядоченное

множество с наименьшим элементом 0 , такой, что каждый интервал $[0, a]$, $a \in P$ является частично упорядоченным множеством с ортодополнением $x \rightarrow x^{\perp_a}$ таким, что выполняются следующие условия:

(i) $([0, a], \leq, \perp_a)$ является квантовой логикой для любого $a \in P$;

(ii) если $a \leq b$, то $x^{\perp_a} = x^{\perp_b} \wedge a$ для всех $x \in [0, a]$

Определение 5. Пусть P и Q обобщенные ортомодулярные частично упорядоченные множества и $\varphi: P \rightarrow Q$. Тогда φ называется *квантово-логическим морфизмом*, если для любых ортогональных $a, b \in P$ имеем:

$$(i) \varphi(0) = 0;$$

$$(ii) \varphi(a) \perp \varphi(b);$$

$$(iii) \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b).$$

Если φ является биекцией, такой, что оба φ и φ^{-1} являются квантово-логическими морфизмами, тогда φ называется *квантово-логическим изоморфизмом*.

Напомним, что *SFS*-пространстве Z выполняются равенства $U = GU$ и $F = SF$ (см. [8, Теорема 1]). Тогда из [2, Лемма 2.4] и [3, Предложение 1.6] вытекает, что для любых $u, v \in GU$ имеем $S_v^{-1}(F_u) = F_{S_v^* u}$, т.е. $S_v^* u$ является геометрическим трипотентом. Эти факты мы будем иметь в виду в дальнейшем.

Предложение 6. Пусть Z – нейтральное *SFS*-пространство и v, ω фиксированные геометрические трипотенты в Z^* . Определим отображение $\varphi: L_\omega \rightarrow L_{S_v^* \omega}$ в виде $\varphi(u) = S_v^* u$, для любого $u \in L_\omega$. Тогда φ является квантово-логическим изоморфизмом.

Доказательство. Сначала покажем биективность отображения φ . Сюръективность φ очевидна. Покажем его инъективность. Пусть $x, y \in L_\omega$ и $x \neq y$. Поскольку существует биекция $GU \ni u \mapsto F_u \in SF$ (см. [3, Предложение 1.6]), то $F_x \neq F_y$, следовательно, $F_x \Delta F_y \neq \emptyset$. Пусть $f \in F_x \Delta F_y$. Тогда возможны следующие два случая.

1-случай. $f \in F_x \setminus F_y$. Тогда

$$1 = \langle x, f \rangle = \langle x, S_v(S_v^{-1} f) \rangle = \langle S_v^* x, S_v^{-1} f \rangle$$

и

$$1 \neq \langle y, f \rangle = \langle y, S_v(S_v^{-1} f) \rangle = \langle S_v^* y, S_v^{-1} f \rangle,$$

т.е. $S_v^{-1} f \in F_{S_v^* x} \setminus F_{S_v^* y}$, следовательно, $F_{S_v^* x} \neq F_{S_v^* y}$, поэтому $S_v^* x \neq S_v^* y$, т.е. $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

2-случай. $f \in F_y \setminus F_x$. Аналогично как и в 1-случае получим $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Таким образом, если $x \neq y$, то $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, т.е. φ – инъекция. Теперь докажем, что $x \diamond y \Leftrightarrow \varphi(x) \diamond \varphi(y)$. Пусть $x, y \in L_\omega$ и $x \diamond y$. Тогда по [2, Лемма 2.5] имеем $x \pm y \in GU$, следовательно,

$$S_v^* x \pm S_v^* y = S_v^* (x \pm y) \in GU.$$

Поскольку $S_v^* x, S_v^* y \in GU$, то из [2, Лемма 2.5] вытекает, что $S_v^* x \diamond S_v^* y$, т.е. $\varphi(x) \diamond \varphi(y)$. Обратное, если $\varphi(x) \diamond \varphi(y)$ для $x, y \in L_\omega$, то

$$S_v^* (x + y) = S_v^* x + S_v^* y = S_v^* x^\vee S_v^* y \in L_{S_v^* \omega}$$

следовательно, $x + y \in L_\omega$. Тогда из [2, Лемма 2.5] получим, что $x \diamond y$. Таким образом, $x \diamond y \Leftrightarrow \varphi(x) \diamond \varphi(y)$, т.е. φ является ортоизоморфизмом. Теперь покажем, что $\varphi(x^\vee y) = \varphi(x)^\vee \varphi(y)$, когда $x \diamond y$. Мы наверху показали, что $S_v^* x, S_v^* y \in GU$ и $S_v^* x \diamond S_v^* y$. Тогда

$$\varphi(x^\vee y) = S_v^* (x^\vee y) = S_v^* (x + y) = S_v^* x + S_v^* y = S_v^* x^\vee S_v^* y = \varphi(x)^\vee \varphi(y).$$

Таким образом, выполняются все условия Определения 5, поэтому φ является квантово-логическим изоморфизмом. $\square$

Список литературы

1. Freidman Y., Russo B., Structure of the predual of a *JBW*-triple, J.Reine Angew, Math.356 (1985), 67-89.
2. Freidman Y., Russo B., A geometric spectral theorem, Quart.J.Math.Oxford. 1986. Vol.37.2.p.263-277.
3. Freidman Y., Russo B., Affine structure of facially symmetric spaces, Math.Proc.Cambridge Philos.Soc.106 (1989) 107-124.
4. Freidman Y., Russo B., Some affine geometrik aspects of operator algebras, Pac.J.Math. 137(1989),123-144.
5. Freidman Y., Russo B., Geometry of the Dual ball of the Spin Factor, Proc.LON.Math.Soc. 65 (1992),.p. 142-174.
6. Freidman Y., Russo B., Classification of atomic facially symmetric spaces, Canad.J.Math.-1993. -№ 1 (45). –P. 33-87.
7. Hamhalter J., Dye's theorem for tripotents in von Neumann algebras and *JBW*-triples, Banach J.Math.Anal. 15,49 (2021).
8. Ядгоров Н.Ж., Слабо и Сильно гранево симметричные пространства Доклады АН РУз.- Ташкент,-1996. - №5. -С. 6-8.