RESEARCH FOCUS
xalqaro ilmiy jurnali
hamkorligida

DOI
10.66073/ReFocus-Conf/0910202

QR-kod maqolaning DOI sahifasini ochadi

SAHIFALAR 994–997
TIL Qoraqalpoq

IQTIBOS UCHUN
Mustafaeva Raxima, Jumamuratova Shaxsanem. Infekciya keselligi tarqalıwınıń matematikalıq modeli // «O‘zbekiston olima ayollarining mamlakat taraqqiyotiga qo‘shayotgan hissasi» mavzusidagi xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya materiallari (Nukus, 2026-yil 9–10-oktyabr). – Nukus, 2026. – B. 994–997. – DOI: https://doi.org/10.66073/ReFocus-Conf/0910202

INFEKCIYA KESELLIGI TARQALIWINIŃ MATEMATIKALIQ MODELI

Mustafaeva Raxima
fizika -matematika ilimleriniń kandidatı
Ámeliy matematika hám informatika kafedrası docenti
Jumamuratova Shaxsanem
Ámeliy matematika tálim baǵdarı
2-kurs studenti, Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti.

Annotaciya: Jumısta juqpalı keselliklerdiń jabıq populyaciyada tarqalıwın tárıypleytuǵın klassikalıq Kermak-Makkendrik SIR modeli úyrenilgen. Ápiwayı differenciallıq teńlemeler sisteması kórinisindegi modeldiń qoyılıwı keltirilgen. Sonday-aq, sistemanıń birinshi integralı kórip shıǵıladı hám infekciyalanǵanlar funkciyasınıń maksimum mánisine erisiw shárti keltirip shıǵarıladı. SIR modeli ápiwayılıǵına qaramastan, epidemiyalıq processtiń tiykarǵı nızamlıqların adekvat sáwlelendiriwi hám matematikalıq epidemiologiyanıń quramalıraq modelleri ushın tiykar bolıwı kórsetilgen.

Tayanısh sózler: SIR modeli, matematikalıq epidemiologiya modeli, differenciallıq teńlemeler, tiykarǵı reproduktiv san, epidemiya shıńı.

Házirgi waqıtta epidemiyalıq processlerdi modellestiriwge úlken itibar qaratılmaqta. Ásirese, bul másele COVID-19 koronavirus infekciyasınıń tarqalıwına baylanıslı áhmiyetli bolıp qaldı.

Epidemiya tarqalıwınıń klassikalıq hám eń ápiwayı matematikalıq modeli – bul Kermak-Makendriktıń SIR-model bolıp hám bul model boyınsha bir jerde jasawshı barlıq xalıqtı úsh toparǵa bóledi:

- **S (Susceptible)** - bul ele awırmaǵan, biraq viruslanǵan adam menen ushırasqanda keselleniwi múmkin bolǵan adamlar sanı.
- **I (Infectious)** - infekciya juqtırǵan hám kesellikti basqalarǵa tarqatatuǵın juqpalı adamlar sanı.
- **R (Recovered / Removed**) - emlenip, turaqlı immunitetke iye bolg’an hám infekciya juqtırıw processinen táwir bolıp shıǵıp ketken (yaki qaytıs bolg’an) adamlar sanı.

Hár bir toparda t -waqıtta baylanıslı adamlar sanınıń ózgeriw processi sızıqlı emes ápiwayı differenciallıq teńlemeler sisteması menen tárıyplenedi. Xalıqtıń ulıwma sanı $N = S + T + R = const$ turaqlı bolg’an jaǵdayda, toparlardıń sanlı dinamikası ápiwayı differenciallıq ten’lemeler sisteması menen tárıyplenedi[1, 2]:

$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{S I}{N}$ - keselleniwi múmkin bolǵan adamlar sanınıń kemeyiw tezligi;

$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{S I}{N} - \gamma I$ -infekciya juqtırǵan adamlar sanınıń ózgeriw tezligi;

$\frac{dR}{dt} = \gamma I$ adamlardıń emlenip, sawalǵanlar toparına ótiw tezligi.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{S I}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{S I}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases}$$

Bunda β (infekciya juqtırıw koefficienti) - bul bir adamnıń bir birlik waqıt momentindegi ortasha kontaktlar sanın kórsetedi, γ(táwir bolıw koefficienti) - keselliktiń ortasha waqıtına keri bolǵan shama.

Tiykarǵı infekciyalanǵan adamlardıń kobeyiwiń R_0 sanı, bunda $R_0 = \beta / \gamma$ qatnası sıpatında esaplanadı. Ol óziniń keselligi dawamında, bir nawqas adam ortasha qansha adamǵa infekciyanı juqtırıwı múmkin ekenligin kórsetedi. Eger $R_0 > 1$bolsa, onda kesellik tarqaladı hám epidemiya baslanadı, al $R_0 < 1$bolsa, epidemiyanıń tarqalıwı toqtaydı[2].

Bunda

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = -\frac{\beta SI}{N} + \frac{\beta SI}{N} - \gamma I + \gamma I = 0.$$

Demek, $S(t) + I(t) + R(t) = const$ turaqlı boladı. Al bul bolsa R parametrdi shıǵarıp taslawǵa hám eki teńleme menen islew imkaniyatın beredi.

$S'(t) = -\frac{\beta SI}{N} \le 0$, $R'(t) = \gamma I \ge 0$ bolǵanı sebepli, $S(t)$ funkciyası monoton kemeyiwshi hám $R(t)$ monoton ósiwshi funkciyalar boladı.

Ekinshi teńlemeni birinshi teńlemege bólip, tómendegi qatnasına iye bolamız:

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{N}{R_0 S}.$$

Bul qatnasın integrallasaq, onda sistemanıń birinshi integralına iye bolamız:

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \frac{N}{R_0} \ln \frac{S}{S_0}$$

Ekinshi teńlemeden $t = 0$hám $S_0 \approx N$ bolǵanda:

$$I'(0) = I_0 \left(\frac{\beta S_0}{N} - \gamma \right) \approx \gamma I_0 (R_0 - 1).$$

DOI 10.66073/ReFocus-Conf/0910202

Eger $R_0 > 1$ bolsa, onda $I'(0) > 0$ – bunda virus juqqanlar sanı artıp, epidemiya keselligi tarqalıp baslaydı. Eger $R_0 < 1$ bolsa, onda $I'(0) < 0$ – demek epidemiya keselligi dáslepki kúnnen baslap-aq toqtaydı. Bul Kermak-Makkendriktiń shegara teoreması.

$I(S)$ funkciyanıń maksimum mánisin izertleymiz

$$\frac{dI}{dS} = 0, \quad S^* = \frac{N}{R_0}.$$

Ekinshi tuwındısı tómendegishe boladı:

$$\frac{d^2I}{dS^2} = -\frac{N}{R_0 S^2} < 0$$

da $S > 0$.

Ekinshi tuwındı barlıq waqıtta teris mánisine iye bolǵanlıqtan tabılǵan $S^* = \frac{N}{R_0}$ noqat qatań maksimum noqatı boladı. Fazalıq traektoriya teńlemesine S^* mánisin aparıp qoyamız hám infekciyalanǵan adamlardıń $I_{\max}$ eń joqarı sanı ushın tómendegi ańlatpasına iye bolamız:

$$I_{\max} = I_0 + S_0 - \frac{N}{R_0}\left(1 + \ln\frac{R_0 S_0}{N}\right).$$

Bunnan áhmiyetli epidemiologiyalıq juwmaq kelip shıǵadı: egerde S-topardaǵı adamlar sanınıń úlesi $1/R_0$ muǵdarına shekem kemeygen waqıt momentinde, epidemiya maksimum mánisine erisedi. $1 - 1/R_0$ muǵdar jámáátlik immunitet shegarası dep ataladı. Epidemiya menen awırıp táwir bolǵan hám vakcina alǵan adamlardıń sanı usı úlesine jetkennen keyin, aktiv (awırǵan) nawqaslardıń sanı azaya baslaydı [1,2].

SIR sisteması elementar funkciyalarda sheshimge iye emes, sonıń ushın h adımlı Eyler usılınan qollanıladı.

Meyli $N = 1000$, $I_0 = 1$, $\beta = 0,4$ kun^{-1}, $\gamma = 0,1$ kun^{-1}, $R_0 = 4$. Keselliktiń ortasha dawamlılıǵı 10 kún.

Analitikalıq bahalaw júrgiziwde eń joqarı dárejesi $S' = 250$, $I_{\max} = 400$, emlenip shıqqanlardıń úlesi $\approx 98\%$.

Juwmaqlaw. Epidemiya keselliginiń tarqalıwınıń SIR modeli ápiwayı bolıwına qaramastan epidemiyalıq processlerdiń tiykarǵı nızamlıqların durıs kórsetedi hám zamanagóy matematikalıq epidemiologiyanıń fundamenti bolıp esaplanadı.

DOI 10.66073/ReFocus-Conf/0910202

Paydalanılǵan ádebiyatlar

1. Ризниченко Г.Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии: учеб.пособие.-М. : Изд-во Юрайт, 2019.- 181 с.

2. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии М.-Ижевск, ИКИ, 2003.

DOI 10.66073/ReFocus-Conf/0910202