



QR-kod
maqolaning DOI
sahifasini
ochadi

IQTIBOS UCHUN

Saparova Aysanem Ajiniyazovna.
Chegaraviy masalalarni yechishda
zamonaviy sonli usullarning
qo'llanilishi va ularning samaradorligi
tahlili // «O'zbekiston olimi
ayollarining mamlakat taraqqiyotiga
qo'shayotgan hissasi» mavzusidagi
xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya
materiallari (Nukus, 2026-yil 9–10-
oktyabr). – Nukus, 2026. – B. 1196–
1200. – DOI: [https://doi.org/](https://doi.org/10.66073/ReFocus-Conf/0910245)
10.66073/ReFocus-Conf/0910245

CHEGARAVIY MASALALARNI YECHISHDA ZAMONAVIY SONLI USULLARNING QO'LLANILISHI VA ULARNING SAMARADORLIGI TAHLILI

Saparova Aysanem Ajiniyazovna

Qoraqalpoq davlat universiteti, Matematika fakulteti,
Matematik tahlil kafedrası assistent o'qituvchisi
e-mail: saparovaaysanem09@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun ikki nuqtali chegaraviy masalalarni yechishning zamonaviy sonli usullari – chekli ayirmalar usuli, chekli elementlar usuli (Galyorkin yondashuvi), otish (shooting) usuli va Chebishev nuqtalaridagi spektral kollokatsiya usuli ko'rib chiqilgan. Aniq yechimi ma'lum bo'lgan test masalasida usullarning aniqligi, yaqinlashish tartibi va hisoblash hajmi bo'yicha qiyosiy tahlil o'tkazilgan. Hisoblash tajribalari silliq yechimlar uchun spektral usulning eksponensial aniqligini, otish usulining esa katta parametrlil masalalarda turg'unligini yo'qotishini ko'rsatdi. Natijalar asosida usul tanlash bo'yicha amaliy tavsiyalar berilgan.

Kalit so'zlar: chegaraviy masala, chekli ayirmalar usuli, chekli elementlar usuli, otish usuli, spektral kollokatsiya, yaqinlashish tartibi, turg'unlik, samaradorlik.

Аннотация: В статье рассмотрены современные численные методы решения двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод стрельбы и спектральный метод коллокации на узлах Чебышёва. На тестовой задаче с известным точным решением проведён сравнительный анализ точности, порядка сходимости и устойчивости методов, даны практические рекомендации по выбору метода.

Ключевые слова: краевая задача, метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод стрельбы, спектральный метод, сходимость, устойчивость.

Abstract: The paper considers modern numerical methods for two-point boundary value problems for second-order ordinary differential equations: the finite difference method, the finite element method, the shooting method and Chebyshev spectral collocation. Their accuracy, order of convergence and stability are compared on a test problem with a known exact solution, and practical recommendations for choosing a method are given.

Keywords: boundary value problem, finite difference method, finite element method, shooting method, spectral collocation, convergence, stability.

Kirish (adabiyotlar sharhi)

Fizika, mexanika, issiqlik o'tkazuvchanlik, elastiklik nazariyasi, kimyoviy kinetika va iqtisodiy modellashtirishdagi ko'plab jarayonlar chegaraviy masalalar ko'rinishida ifodalanadi. Masalan, sterjendagi statsionar issiqlik taqsimoti, to'sinning egilishi, diffuziya-reaksiya jarayonlari ikkinchi tartibli differensial tenglama va uning oraliq uchlarida berilgan shartlar bilan tavsiflanadi. Amaliyotda uchraydigan masalalarning aksariyati



«O'zbekiston olimi ayollarining
mamlakat taraqqiyotiga
qo'shayotgan hissasi»

XALQARO ILMIY-AMALIY
KONFERENSIYA
NUKUS, 9–10-OKTYABR 2026

analitik yechimga ega emas, shu sababli sonli usullar asosiy tadqiqot vositasiga aylangan.

Chegaraviy masalalarni sonli yechish nazariyasining asoslari A.A. Samarskiyning ayirmali sxemalar nazariyasiga oid ishlarida [1], N.S. Baxvalov va hammualliflarning darsligida [2] batafsil yoritilgan. H.B. Keller [6] va U.M. Ascher, R.M.M. Mattheij, R.D. Russell [5] monografiyalarida otish usuli, ko'p nuqtali otish va kollokatsiya usullarining turg'unlik masalalari tahlil qilingan. Chekli elementlar usulining variatsion asoslari O.C. Zienkiewicz va hammualliflar ishida [7], spektral usullar esa L.N. Trefethen tomonidan [4] keng yoritilgan. Kichik parametrli (singulyar g'alayonlangan) masalalar uchun maxsus to'rlar va robust sxemalar H.-G. Roos va hammualliflar [10] ishida o'rganilgan. O'zbek tilidagi adabiyotlarda hisoblash usullari asoslari M.I. Isroilov darsligida [9] bayon etilgan.

Shunga qaramay, bir xil test masalasi misolida turli usullarning aniqligi, yaqinlashish tezligi va turg'unligini bevosita taqqoslovchi, talabalar va yosh tadqiqotchilar uchun usul tanlash mezonlarini aniq ko'rsatib beruvchi ishlar yetarli emas. Bu esa tadqiqotning dolzarbligini belgilaydi.

Ikki nuqtali chiziqli chegaraviy masalalar uchun zamonaviy sonli usullarning samaradorligini hisoblash tajribasi asosida qiyosiy baholash. Vazifalari: 1) usullarning diskret modellarini tuzish; 2) ularni dasturiy amalga oshirish; 3) aniq yechim bilan taqqoslab xatolik va yaqinlashish tartibini aniqlash; 4) katta parametrli masalada turg'unlikni tekshirish; 5) usul tanlash bo'yicha tavsiyalar ishlab chiqish.

Materiallar va uslublar

Tadqiqot obyekti sifatida quyidagi chiziqli chegaraviy masala olindi:

$$-u''(x) + k^2 u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (1)$$

bu yerda $f(x) = (\pi^2 + k^2) \sin(\pi x)$ deb tanlangan, shuning uchun masalaning aniq yechimi $u(x) = \sin(\pi x)$ bo'ladi. Asosiy tajribalarda $k = 1$, turg'unlikni tekshirishda esa $k = 10, 20, 40, 60$ qiymatlar olindi. $[0, 1]$ oraliqda qadami $h = 1/N$ bo'lgan tekis to'ra $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$ kiritildi.

1. Chekli ayirmalar usuli (ChAU). Ikkinchi hosilani markaziy ayirma bilan almashtirish natijasida

$$-(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / h^2 + k^2 y_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad y_0 = y_N = 0 \quad (2)$$

uch diagonalli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. U haydash (progonka) usuli bilan $O(N)$ amalda yechiladi. Sxemaning approksimatsiya xatoligi $O(h^2)$ ga teng [1].

2. Chekli elementlar usuli (ChEU). (1) masalaning kuchsiz (variatsion) shakli: barcha $v \in H_0^1(0,1)$ uchun

$$\int (u'v' + k^2 uv) dx = \int f v dx \quad (3)$$

tenglik bajarilishi talab qilinadi. Yechim bo'lakli chiziqli «qalpoqcha» bazis funksiyalar orqali izlanadi. Natijada qattqlik va massa matritsalaridan iborat uch diagonalli sistema hosil bo'ladi; o'ng tomon integrallari har bir elementda uch nuqtali Gauss kvadratura formulasi bilan hisoblandi. Tugunlardagi xatolik $O(h^2)$ tartibga ega [7].

3. Otish usuli (OU). Masala chiziqli bo'lgani uchun superpozitsiya prinsipidan foydalanildi: $u = w_1 + s w_2$, bu yerda w_1 bir jinsli bo'lmagan tenglamaning $w_1(0) = 0$, $w_1'(0) = 0$ shartli, w_2 esa bir jinsli tenglamaning $w_2(0) = 0$, $w_2'(0) = 1$ shartli Koshi masalalarining yechimlari. Ikkala Koshi masalasi to'rtinchi tartibli Runge–Kutta usuli bilan yechildi, noma'lum parametr $s = -w_1(1)/w_2(1)$ formuladan topildi. Usulning xatoligi $O(h^4)$ tartibli [3, 6].

4. Spektral kollokatsiya usuli (SKU). Yechim N -darajali algebraik ko'phad bilan approksimatsiya qilinadi va tenglama Chebishev–Gauss–Lobatto nuqtalari $\xi_j = \cos(\pi j/N)$ da (so'ngra $[0, 1]$ ga akslantirilib) bajarilishi talab qilinadi. Hosilalar Chebishev differensiallash matritsasi D orqali, ikkinchi hosila esa D^2 ko'rinishida hisoblanadi [4]. Hosil bo'lgan matritsa to'la (zich), ammo uning o'lchami juda kichik bo'ladi. Silliqlik yechimlar uchun xatolik N ortishi bilan eksponensial kamayadi.

Barcha algoritmlar Python (NumPy) muhitida dasturlashtirildi. Aniqlik mezoni sifatida to'rt tugunlaridagi maksimal absolyut xatolik $\|e\|_\infty = \max|y_i - u(x_i)|$ olindi, yaqinlashishning amaliy tartibi esa $p = \log_2(\|e_N\|/\|e_{2N}\|)$ formula bilan baholandi.

Natijalar

1-jadvalda $k = 1$ bo'lganda ChAU, ChEU va OU uchun turli N qiymatlarida olingan maksimal xatoliklar va yaqinlashish tartibi keltirilgan.

1-jadval. Maksimal absolyut xatolik va yaqinlashish tartibi ($k = 1$)

N	ChAU $\ e\ $	p	ChEU $\ e\ $	p	OU (RK4) $\ e\ $	P
10	$7,50 \cdot 10^{-3}$	–	$7,54 \cdot 10^{-4}$	–	$5,49 \cdot 10^{-6}$	–
20	$1,87 \cdot 10^{-3}$	2,00	$1,89 \cdot 10^{-4}$	2,00	$3,43 \cdot 10^{-7}$	4,00
40	$4,67 \cdot 10^{-4}$	2,00	$4,73 \cdot 10^{-5}$	2,00	$2,15 \cdot 10^{-8}$	4,00
80	$1,17 \cdot 10^{-4}$	2,00	$1,18 \cdot 10^{-5}$	2,00	$1,34 \cdot 10^{-9}$	4,00
160	$2,92 \cdot 10^{-5}$	2,00	$2,96 \cdot 10^{-6}$	2,00	$8,38 \cdot 10^{-11}$	4,00

Jadvalda, ChAU va ChEU uchun amaliy yaqinlashish tartibi nazariy qiymat $p = 2$ bilan to'liq mos keladi: to'rt qadami ikki marta kichraytirilganda xatolik to'rt marta kamayadi. Bir xil N da ChEU xatoligi ChAUGa nisbatan taxminan 10 marta kichik; bu o'ng tomonning element bo'yicha integrallanishi (o'rtachalash) hisobiga approksimatsiya konstantasining kichrayishi bilan izohlanadi. Otish usuli Runge–Kutta sxemasi tufayli to'rtinchi tartibli aniqlikni ta'minlaydi va $N = 160$ da xatolik 10^{-10} darajasiga yetadi.

2-jadvalda spektral kollokatsiya usuli natijalari keltirilgan.

2-jadval. Spektral kollokatsiya usulining xatoligi ($k = 1$)

N	4	6	8	12	16	20
$\ e\ $	$4,63 \cdot 10^{-3}$	$1,67 \cdot 10^{-5}$	$1,03 \cdot 10^{-7}$	$9,44 \cdot 10^{-13}$	$4,00 \cdot 10^{-15}$	$4,11 \cdot 10^{-15}$

SKU atigi $N = 8$ tugunda ChAUNing $N = 160$ dagi natijasidan 280 marta aniqroq yechim beradi, $N = 16$ da esa xatolik mashina aniqligi ($\approx 10^{-15}$) chegarasiga yetadi. Keyingi oshirish xatolikni kamaytirmaydi, chunki yaxlitlash xatoliklari

ustunlik qiladi. Demak, yechim silliq bo'lganda spektral usul bir xil aniqlik uchun eng kam noma'lumlar sonini talab qiladi.

Usullarning turg'unligi (1) masalada k parametrini oshirish orqali tekshirildi ($N = 200$). Natijalar 3-jadvalda keltirilgan.

3-jadval. Katta k parametrida otish usuli va ChAU xatoligi ($N = 200$)

K	OU ell	ChAU ell	$ w_2(1) $
10	$5,57 \cdot 10^{-9}$	$1,85 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^3$
20	$2,48 \cdot 10^{-8}$	$4,95 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^7$
40	$9,69 \cdot 10^{-1}$	$1,26 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \cdot 10^{15}$
60	$2,68 \cdot 10^8$	$5,62 \cdot 10^{-8}$	$9,5 \cdot 10^{23}$

k ortishi bilan bir jinsli tenglama yechimi $w_2 \sim e^{kx}/k$ tez o'sadi va $k = 40$ da $|w_2(1)| \approx 10^{15}$ ga yetadi. Natijada s parametrini topishda katta sonlarning ayirmasi hisobiga muhim raqamlar yo'qoladi va otish usuli butunlay noto'g'ri natija beradi (xatolik 10^8 gacha). ChAU esa bu holda ham turg'un qoladi, chunki uning matritsasi diagonal ustunlikka ega va k ortishi bilan sistema shartlanganligi yaxshilanadi. Bu natija [5, 6] da qayd etilgan nazariy xulosalarni amaliy jihatdan tasdiqlaydi.

Hisoblash hajmi nuqtayi nazaridan ChAU va ChEU uch diagonalli sistemani $O(N)$ amalda yechish imkonini beradi, OU ikki Koshi masalasi uchun har qadamda 4 ta o'ng tomon hisoblashni talab qiladi, SKU esa $O(N^3)$ murakkablikdagi zich sistemaga keladi, lekin N juda kichik (16–20) bo'lgani sababli amalda eng tejankor hisoblanadi. 4-jadvalda usullarning umumiy qiyosiy tavsifi keltirilgan.

4-jadval. Sonli usullarning qiyosiy tavsifi

Mezon	ChAU	ChEU	OU	SKU
Yaqinlashish tartibi	$O(h^2)$	$O(h^2)$	$O(h^4)$	eksponensial
Sistema turi	uch diagonalli	uch diagonalli	Koshi masalalari	zich
Katta k da turg'unlik	yuqori	yuqori	past	yuqori
Murakkab soha / nosilliq yechim	o'rtacha	yuqori	past	past
Dasturlash soddaligi	juda oddiy	o'rtacha	oddiy	o'rtacha

Xulosa va tavsiyalar

O'tkazilgan tadqiqot natijasida quyidagi xulosalarga kelindi:

1. Chekli ayirmalar usuli sodda, universal va turg'un bo'lib, $O(h^2)$ aniqlikni kafolatlaydi. U o'quv jarayonida va o'rtacha aniqlik talab qilinadigan amaliy hisoblarda eng qulay vosita hisoblanadi.

2. Chekli elementlar usuli ham ikkinchi tartibli aniqlikka ega, biroq bir xil to'rda xatoligi ChAUGa nisbatan sezilarli darajada kichik. Uning asosiy afzalligi – notekis to'rlar, o'zgaruvchan koeffitsiyentlar va murakkab chegaraviy shartlarga moslashuvchanligi.

3. Otish usuli kichik parametrli masalalarda yuqori (to'rtinchi tartibli) aniqlik beradi, ammo tez o'suvchi yechimlar mavjud bo'lganda turg'unligini

yo'qotadi. Bunday hollarda ko'p nuqtali otish usuli yoki global usullarga (ChAU, ChEU) o'tish tavsiya etiladi.

4. Spektral kollokatsiya usuli silliq yechimlar uchun eng samarali: 16–20 tugunda mashina aniqligiga erishiladi. Biroq yechim silliq bo'lmaganda yoki chegaraviy qatlam mavjud bo'lganda uning afzalligi kamayadi.

Amaliy masalada usul tanlashda yechimning silliqdigi, masaladagi parametrlarning kattaligi va talab qilinadigan aniqlik birgalikda hisobga olinishi lozim. Silliq yechimli masalalar uchun spektral usul, murakkab geometriya va notekis to'r talab qilinganda chekli elementlar usuli, o'quv va tezkor hisoblar uchun chekli ayirmalar usuli, kichik o'lchamli yaxshi shartlangan masalalar uchun esa otish usuli tavsiya etiladi. Kelgusida tadqiqotni nochiqli va singulyar g'alayonlangan chegaraviy masalalar hamda adaptiv to'rlar bilan kengaytirish rejalashtirilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
3. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. 9th ed. – Boston: Brooks/Cole, 2011. – 872 p.
4. Trefethen L.N. Spectral Methods in MATLAB. – Philadelphia: SIAM, 2000. – 165 p.
5. Ascher U.M., Mattheij R.M.M., Russell R.D. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. – Philadelphia: SIAM, 1995. – 595 p.
6. Keller H.B. Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems. – New York: Dover, 1992. – 398 p.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. – 756 p.
8. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. 2nd ed. – Berlin: Springer, 2007. – 655 p.
9. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1-qism. – Toshkent: O'zbekiston, 2003. – 432 b.
10. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. 2nd ed. – Berlin: Springer, 2008. – 604 p.