



QR-kod
maqolaning DOI
sahifasini
ochadi

IQTIBOS UCHUN

Saparova Aysanem Ajiniyazovna.
Matematik modellash tirish yordamida
murakkab jarayonlardagi tarqalish
tenglamalarining taqribiy yechimlarini
topish usullari // «O'zbekiston olimi
ayollarining mamlakat taraqqiyotiga
qo'shayotgan hissasi» mavzusidagi
xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya
materiallari (Nukus, 2026-yil 9–10-
oktyabr). – Nukus, 2026. – B. 1205–
1209. – DOI: <https://doi.org/10.66073/ReFocus-Conf/0910247>

MATEMATIK MODELLASHTIRISH YORDAMIDA MURAKKAB JARAYONLARDAGI TARQALISH TENGLAMALARINING TAQRIBIY YECHIMLARINI TOPISH USULLARI

Saparova Aysanem Ajiniyazovna

Qoraqalpoq davlat universiteti, Matematika fakulteti

Matematik tahlil kafedrasida assistent o'qituvchisi

e-mail: saparovaaysanem09@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada issiqlik o'tkazuvchanlik, diffuziya, filtratsiya va biologik populyatsiyalarning tarqalishi kabi murakkab jarayonlarni ifodalovchi parabolik tipdagi tarqalish tenglamalarining taqribiy yechimlarini topish usullari o'rganilgan. Chiziqli va nochiziqli tarqalish tenglamalari uchun oshkor, oshkormas va vaznli (Krank–Nikolson) chekli ayirmali sxemalar qurilgan, ularning turg'unlik shartlari va yaqinlashish tartiblari tahlil qilingan. Hosil bo'lgan uch diagonalli tenglamalar sistemasini yechish uchun haydash (progonka) usuli, nochiziqli hol uchun esa Pikar iteratsiyasi qo'llanilgan. Aniq yechimi ma'lum bo'lgan test masalasida o'tkazilgan hisoblash tajribalari natijasida sxemalarning aniqligi va turg'unligi solishtirilib, amaliy tavsiyalar berilgan.

Kalit so'zlar: matematik model, tarqalish tenglamasi, diffuziya, chekli ayirmalar usuli, oshkor sxema, oshkormas sxema, Krank–Nikolson sxemasi, turg'unlik, haydash usuli, nochiziqli diffuziya.

Abstract: The paper studies methods for finding approximate solutions of parabolic spreading (diffusion-type) equations that describe complex processes such as heat conduction, diffusion, filtration and population spread. Explicit, implicit and weighted (Crank–Nicolson) finite difference schemes are constructed for linear and nonlinear equations, and their stability conditions and orders of convergence are analysed. The Thomas (sweep) algorithm and Picard iteration are used for solving the resulting systems. Numerical experiments on a test problem with a known exact solution compare the accuracy and stability of the schemes, and practical recommendations are given.

Keywords: mathematical model, diffusion equation, finite difference method, explicit scheme, implicit scheme, Crank–Nicolson scheme, stability, Thomas algorithm, nonlinear diffusion.

Kirish (adabiyotlar sharhi)

Tabiat va texnikadagi ko'plab jarayonlar – issiqlikning tarqalishi, moddalarning gaz va suyuqliklarda diffuziyasi, g'ovak muhitda suyuqlik va gaz filtratsiyasi, atmosferada zararli moddalarning tarqalishi, epidemiyalar va biologik populyatsiyalarning hududlar bo'ylab kengayishi – parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar, ya'ni tarqalish (diffuziya) tenglamalari orqali ifodalanadi. Real jarayonlarda muhitning xossalari (issiqlik o'tkazuvchanlik, diffuziya koeffitsiyenti) izlanayotgan funksiyaning o'ziga bog'liq bo'ladi, bundan tashqari manba va yutilish hadlari ham mavjud bo'ladi. Natijada model nochiziqli bo'lib, uning analitik yechimini topish



«O'zbekiston olimi ayollarining
mamlakat taraqqiyotiga
qo'shayotgan hissasi»

XALQARO ILMIY-AMALIY
KONFERENSIYA
NUKUS, 9–10-OKTYABR 2026

faqat ayrim xususiy hollardagina mumkin bo'лади. Shu sababli bunday masalalarni sonli usullar yordamida taqribiy yechish va hisoblash tajribasini o'tkazish mavzuning dolzarbligini belgilaydi.

Tarqalish tenglamalari uchun ayirmali sxemalar nazariyasining asoslari A.A. Samarskiyning ishlarida yaratilgan [1, 2]. J. Krank va P. Nikolson tomonidan taklif etilgan vaznli sxema ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan va shartsiz turg'un sxema sifatida hozirgi kungacha keng qo'llanilmoqda [3]. Nochiziqli diffuziya jarayonlarida tarqalishning chekli tezligi, lokalizatsiya va "portlash" (blow-up) kabi hodisalar A.A. Samarskiy, S.P. Kurdyumov, V.A. Galaktionov va A.P. Mixaylovlar tomonidan chuqur o'rganilgan [4]. G'ovak muhit tenglamasining matematik nazariyasi J.L. Vaskes monografiyasida bayon qilingan [5]. O'zbekistonda nochiziqli tarqalish jarayonlarini modellashtirish bo'yicha M. Aripov maktabi etalon tenglamalar usulini ishlab chiqib, avtomodel yechimlar asosida sonli hisoblashlar uchun boshlang'ich yaqinlashishlarni tanlash metodikasini yaratgan [6]. Biologik populyatsiyalar tarqalishining "reaksiya–diffuziya" modellari R. Fisher hamda A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovskiy, N.S. Piskunovlarning klassik ishlaridan boshlangan [7, 8] va J. Marrey monografiyasida tizimlashtirilgan [9]. Chekli ayirmali usullarning zamonaviy bayoni [10, 11] ishlarida keltirilgan.

Murakkab jarayonlarni ifodalovchi tarqalish tenglamalari uchun chekli ayirmali sxemalarni qurish, ularning aniqligi va turg'unligini nazariy hamda hisoblash tajribasi asosida solishtirish va amaliy masalalar uchun samarali usulni tanlash bo'yicha tavsiyalar ishlab chiqishdan iborat.

Tarqalish jarayonining umumlashgan matematik modelini shakllantirish; oshkor, oshkormas va vaznli ayirmali sxemalarni qurish; turg'unlik shartlari va yaqinlashish tartibini aniqlash; nochiziqli hol uchun iteratsion algoritmnini ishlab chiqish; test masalasida hisoblash tajribasini o'tkazish va natijalarni tahlil qilish.

Materiallar va uslublar

Bir o'lchovli muhitda tarqalish jarayonining umumlashgan matematik modeli sifatida quyidagi kvazichiziqli parabolik tenglamani qaraymiz:

$$\partial u / \partial t = \partial / \partial x (D(u) \partial u / \partial x) + f(x, t, u), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

bu yerda $u(x, t)$ – tarqalayotgan kattalik (harorat, konsentratsiya, populyatsiya zichligi), $D(u) > 0$ – tarqalish koeffitsiyenti, $f(x, t, u)$ – manba yoki yutilishni ifodalovchi funksiya. Tenglama (1) boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan to'ldiriladi:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \quad (2)$$

Xususan, $D(u) = u^\sigma$ ($\sigma > 0$) bo'lganda (1) g'ovak muhitdagi filtratsiya yoki nochiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasiga, $D = \text{const}$ va $f = ru(1 - u/K)$ bo'lganda esa Fisher–Kolmogorov populyatsiya tarqalishi tenglamasiga aylanadi [7–9].

Sohani $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = l/N$ va $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \dots, M$, $\tau = T/M$ tugunlar bilan to'r (setka) ga ajratamiz. To'r funksiyani $y_i^j \approx u(x_i, t_j)$ bilan belgilaymiz va $\gamma = \tau/h^2$ deb olamiz. Dastlab $D = 1$, $f = 0$ bo'lgan chiziqli holni qaraymiz. Vaznli ayirmali sxema quyidagi ko'rinishga ega [1]:

$$(y_i^{j+1} - y_i^j)/\tau = \theta \Lambda y_i^{j+1} + (1 - \theta) \Lambda y_i^j, \Lambda y_i = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2, \quad (3)$$

bu yerda $0 \leq \theta \leq 1$ – vazn parametri. $\theta = 0$ bo'lganda oshkor sxema, $\theta = 1$ bo'lganda oshkormas sxema, $\theta = 0,5$ bo'lganda esa Krank–Nikolson sxemasi hosil bo'ladi. Oshkor sxemada yangi qatlamdagi qiymatlar bevosita hisoblanadi:

$$y_i^{j+1} = y_i^j + \gamma(y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j). \quad (4)$$

Fon Neyman usuli bo'yicha (4) sxemaning garmonika uchun o'tish ko'paytuvchisi $q = 1 - 4\gamma \sin^2(kh/2)$ ga teng bo'lib, $|q| \leq 1$ shartidan oshkor sxemaning turg'unlik sharti kelib chiqadi:

$$\gamma = \tau/h^2 \leq 1/2. \quad (5)$$

Umumiy holda (3) sxema $\theta \geq 1/2 - h^2/(4\tau)$ bo'lganda turg'un, xususan $\theta \geq 1/2$ da shartsiz turg'unidir. Sxemaning approksimatsiya xatoligi $\theta = 0,5$ da $O(\tau^2 + h^2)$, qolgan hollarda $O(\tau + h^2)$ tartibga ega [1, 11].

$\theta > 0$ bo'lganda har bir vaqt qatlamida uch diagonalli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, i = 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

bu yerda $A_i = B_i = \theta\gamma$, $C_i = 1 + 2\theta\gamma$. Bu sistema haydash (progonka) usuli bilan $O(N)$ amalda yechiladi: haydash koeffitsiyentlari

$$\alpha_{i+1} = B_i/(C_i - A_i \alpha_i), \beta_{i+1} = (A_i \beta_i + F_i)/(C_i - A_i \alpha_i) \quad (7)$$

formulalar bilan to'g'ri yo'nalishda, noma'lumlar esa $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$ formula bilan teskari yo'nalishda hisoblanadi. $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$ diagonal ustunlik sharti bajarilgani uchun haydash usuli turg'unidir [2].

Nochiziqli (1) tenglama uchun konservativ oshkormas sxema quramiz:

$$(y_i^{j+1} - y_i^j)/\tau = [a_{i+1/2}(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - a_{i-1/2}(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})]/h^2 + f_i^j, \quad (8)$$

bu yerda $a_{i\pm 1/2} = [D(y_i) + D(y_{i\pm 1})]/2$. Nochiziqli koeffitsiyentlar Pikar iteratsiyasi yordamida chiziqlantiriladi: s-iteratsiyada $a_{i\pm 1/2}$ koeffitsiyentlari ma'lum $y^{(s)}$ qiymatlar bo'yicha hisoblanadi, $y^{(s+1)}$ esa (6)–(7) haydash usuli bilan topiladi. Iteratsiya $\max|y^{(s+1)} - y^{(s)}| < \varepsilon$ shart bajarilguncha davom ettiriladi, boshlang'ich yaqinlashish sifatida oldingi vaqt qatlamidagi yechim yoki [6] ishdagi kabi avtomodel yechim olinadi. Algoritm Python dasturlash tilida NumPy va SciPy kutubxonalari yordamida amalga oshirildi.

Natijalar

Sxemalarning aniqligini baholash uchun aniq yechimi ma'lum bo'lgan quyidagi test masalasi qaraldi: $D = 1$, $f = 0$, $l = 1$, $T = 0,1$, $u_0(x) = \sin \pi x$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Bu masalaning aniq yechimi $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ ko'rinishga ega. Oshkor sxema uchun $\gamma = 0,4$ (turg'unlik sohasida), oshkormas va Krank–Nikolson sxemalari uchun $\tau = h/10$ qadam tanlandi. $t = T$ momentdagi maksimal absolyut xatolik $\delta = \max|y_i^M - u(x_i, T)|$ 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval. Turli sxemalarda $t = 0,1$ momentdagi maksimal xatolik

N	h	Oshkor ($\gamma = 0,4$)	Oshkormas ($\tau = h/10$)	Krank–Nikolson ($\tau = h/10$)
10	0,1	$4,29 \cdot 10^{-3}$	$2,03 \cdot 10^{-2}$	$2,73 \cdot 10^{-3}$
20	0,05	$1,06 \cdot 10^{-3}$	$9,63 \cdot 10^{-3}$	$6,82 \cdot 10^{-4}$
40	0,025	$2,65 \cdot 10^{-4}$	$4,68 \cdot 10^{-3}$	$1,71 \cdot 10^{-4}$
80	0,0125	$6,62 \cdot 10^{-5}$	$2,30 \cdot 10^{-3}$	$4,26 \cdot 10^{-5}$

Jadvalda, h qadam ikki marta kamaytirilganda oshkor va Krank–Nikolson sxemalarining xatoligi taxminan 4 marta (nisbat 4,00–4,04), oshkormas sxemaning xatoligi esa taxminan 2 marta (nisbat 2,03–2,11) kamayadi. Bu nazariy natijalarga to'la mos keladi: oshkor sxemada $\tau = \gamma h^2$ bo'lgani uchun umumiy xatolik $O(h^2)$, Krank–Nikolson sxemasida $O(\tau^2 + h^2)$, oshkormas sxemada esa vaqt bo'yicha birinchi tartibli $O(\tau)$ xatolik ustunlik qiladi. Bir xil τ qadamda Krank–Nikolson sxemasi oshkormas sxemaga nisbatan 7–54 marta aniqroq natija berdi.

Oshkor sxemaning turg'unlik shartini tekshirish uchun boshlang'ich funksiyaga 10^{-3} amplitudali yuqori chastotali g'alayon qo'shildi ($N = 20$). Natijalar 2-jadvalda keltirilgan.

2-jadval. Oshkor sxemada γ parametrining xatolikka ta'siri ($N = 20$)

$\gamma = \tau/h^2$	Qadamlar soni M	Maksimal xatolik δ	Xulosa
0,25	160	$3,79 \cdot 10^{-4}$	turg'un
0,50	80	$1,89 \cdot 10^{-3}$	turg'un (chegara)
0,55	73	$2,63 \cdot 10^2$	noturg'un
0,60	67	$3,03 \cdot 10^6$	noturg'un

2-jadval natijalari (5) shartning muhimligini yaqqol ko'rsatadi: γ 0,5 dan atigi 10 % ga oshirilganda g'alayon har qadamda $|q| \approx 1,19$ marta o'sib, yechim butunlay buziladi. Shunday qilib, oshkor sxemada aniqlik uchun zarur bo'lgan kichik h qadam vaqt bo'yicha juda kichik $\tau \leq h^2/2$ qadamni talab qiladi, bu esa hisoblash hajmini keskin oshiradi. Masalan, $h = 0,0125$ da oshkor sxema 1600 ta vaqt qadamini, Krank–Nikolson sxemasi esa 80 ta qadamni talab qilib, undan ham aniqroq natija berdi.

Nochiziqli $D(u) = u^2$ hol uchun (8) sxema bo'yicha $N = 100$, $\tau = 10^{-3}$ qadamlarda, boshlang'ich holatda faqat $0,4 < x < 0,6$ oraliqda $u_0 = 1$ (qolgan qismida nol) bo'lgan masala hisoblandi. Pikar iteratsiyasi har bir vaqt qatlamida o'rtacha 7 ta (5 tadan 15 tagacha) iteratsiyada $\varepsilon = 10^{-6}$ aniqlikka yaqinlashdi, iteratsiyalar soni esa eng ko'p boshlang'ich qadamlarda – yechim gradiyenti katta bo'lganda kuzatildi. $t = 0,05$ momentda tarqalish sohasi $[0,24; 0,76]$ oraliq bilan chegaralanib, undan tashqarida yechim amalda nolga teng bo'lib qoldi. Bu natija nochiziqli diffuziyaga xos bo'lgan tarqalishning chekli tezligi effektini aniq tasvirlaydi, bu [4, 5] ishlardagi nazariy natijalar bilan mos keladi. Aynan shu hollarda boshlang'ich yaqinlashishni avtomodel yechim asosida tanlash iteratsiyalar sonini sezilarli kamaytiradi.

Xulosa va tavsiyalar

1. Murakkab tarqalish jarayonlari uchun umumlashgan kvazichiziqli parabolik model shakllantirildi va uning uchun oshkor, oshkormas hamda Krank–Nikolson chekli ayirmali sxemalari qurildi.

2. Oshkor sxema sodda bo'lsa-da, $\tau/h^2 \leq 1/2$ turg'unlik sharti bilan cheklangan; bu shart buzilganda yechim tez buziladi, bu hisoblash tajribasida tasdiqlandi.

3. Krank–Nikolson sxemasi shartsiz turg'un va ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo'lib, bir xil hisoblash xarajatida eng aniq natijani beradi. Shu sababli chiziqli tarqalish masalalari uchun uni asosiy usul sifatida qo'llash tavsiya etiladi.

4. Nochiziqli tarqalish tenglamalari uchun konservativ oshkormas sxema, Pikar iteratsiyasi va haydash usulining birgalikda qo'llanilishi samarali va turg'un algoritmni beradi; boshlang'ich yaqinlashishni avtomodel yechimlar asosida tanlash maqsadga muvofiq.

5. Taklif etilgan algoritmlar issiqlik almashinuvi, ekologik monitoring (ifloslantiruvchi moddalar tarqalishi), filtratsiya va epidemiologik jarayonlarni modellashtirishda, shuningdek oliy ta'lim muassasalarida "Hisoblash usullari" va "Matematik modellashtirish" fanlarini o'qitishda qo'llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
3. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1947. – Vol. 43, No. 1. – P. 50–67.
4. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations. – Berlin: Walter de Gruyter, 1995. – 535 p.
5. Vázquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford: Clarendon Press, 2007. – 624 p.
6. Арипов М. Метод эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. – Ташкент: Фан, 1988. – 137 с.
7. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Annals of Eugenics. – 1937. – Vol. 7. – P. 355–369.
8. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и механика. – 1937. – Т. 1, № 6. – С. 1–26.
9. Murray J.D. Mathematical Biology I: An Introduction. – 3rd ed. – New York: Springer, 2002. – 551 p.
10. LeVeque R.J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. – Philadelphia: SIAM, 2007. – 341 p.
11. Thomas J.W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. – New York: Springer, 1995. – 437 p.